

IBTTM
IBT INSTITUTE PVT. LTD.



संख्यात्मक अभियोग्यता

Helpline : 96 96 96 00 29 | 0181-4606260
www.ibtindia.com

COURSE BOOK

विषय-सूची

अध्याय-1	
संख्या पद्धति	1
अध्याय-2	
जोड़ और घटाव	16
अध्याय-3	
गुणा एवं भाग विधि	19
अध्याय-4	
वर्गमूल और घनमूल	29
अध्याय-5	
वी वोडमास और निकटतम मान	35
अध्याय-6	
द्विघात समीकरण	42
अध्याय-7	
अनुपात एवं समानुपात	47
अध्याय-8	
प्रतिशतता	57
अध्याय-9	
औसत	68
अध्याय-10	
आयु	76
अध्याय-11	
लाभ और हानि	84
अध्याय-12	
साझेदारी	96
अध्याय-13	
साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज	106

अध्याय-14

मिश्रण एवं पृथ्थीकरण 118

अध्याय-15

समय और कार्य 124

अध्याय-16

नल एवं टंकी 137

अध्याय-17

समय एवं दूरी 145

अध्याय-18

रेलगाड़ियाँ 155

अध्याय-19

नाव एवं धारा 165

अध्याय-20

क्षेत्रमिति 172

अध्याय-21

क्रमचय एवं संचय 186

अध्याय-22

प्रायिकता 192

कक्ष परीक्षण

परीक्षण-1 200

परीक्षण-2 203

परीक्षण-3 206

परीक्षण-4 211

परीक्षण-5 216

हल

अध्याय-1	
संख्या पद्धति	221
अध्याय-2	
जोड़ और घटाव	226
अध्याय-3	
गुणा एवं भाग विधि	227
अध्याय-4	
वर्गमूल और घनमूल	228
अध्याय-5	
वी वोडमास और निकटतम मान	231
अध्याय-6	
द्विघात समीकरण	234
अध्याय-7	
अनुपात एवं समानुपात	238
अध्याय-8	
प्रतिशतता	245
अध्याय-9	
औसत	252
अध्याय-10	
आयु	258
अध्याय-11	
लाभ और हानि	263
अध्याय-12	
साझेदारी	271
अध्याय-13	
साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज	276

अध्याय-14

मिश्रण एवं पृथ्थीकरण

284

अध्याय-15

समय और कार्य

292

अध्याय-16

नल एवं टंकी

302

अध्याय-17

समय एवं दूरी

309

अध्याय-18

रेलगाड़ियाँ

316

अध्याय-19

नाव एवं धारा

321

अध्याय-20

क्षेत्रमिति

325

अध्याय-21

क्रमचय एवं संचय

331

अध्याय-22

प्रायिकता

334



संख्या पद्धति (Number System)

संख्याएँ : संख्या जो अंकों के समूह द्वारा दर्शायी जाती है, उसे संख्या कहते हैं। संख्या 843215696 को इस प्रकार भी दर्शाया जा सकता है।

दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
8	4	3	2	1	5	6	9	6

संख्याओं के प्रकार

1. **प्राकृतिक संख्याएँ** : गिनती वाली संख्याओं को प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं।

इनके समुच्चय को 'N' से प्रदर्शित करते हैं।

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

2. **पूर्ण संख्याएँ** : सभी गिनती वाली संख्याएँ और 0 सम्पूर्ण अंकों का समूह बनाते हैं।

इनके समुच्चय को 'W' से प्रदर्शित करते हैं।

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3. **पूर्णांक** : सभी गिनती वाली संख्याएँ शून्य और गिनती वाली ऋणात्मक संख्याएँ पूर्णांकों का समूह बनाती हैं।

इनके समुच्चय को 'I' से प्रदर्शित करते हैं।

$$I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

4. **सम संख्या** : जो संख्या 2 से विभाजित होती है उसे सम संख्या कहते हैं जैसे- 2, 4, 12, 28 आदि।

5. **विषम संख्या** : जो संख्या 2 से विभाजित नहीं होती उनको विषम संख्या कहते हैं जैसे- 1, 3, 5, 7 आदि।

6. **अभाज्य संख्या** : उस संख्या को अभाज्य संख्या कहते हैं यदि इसके सिर्फ दो गुणखंड हैं 1 और वह संख्या स्वयं जैसे 2, 5, 11, 19, 23 आदि।

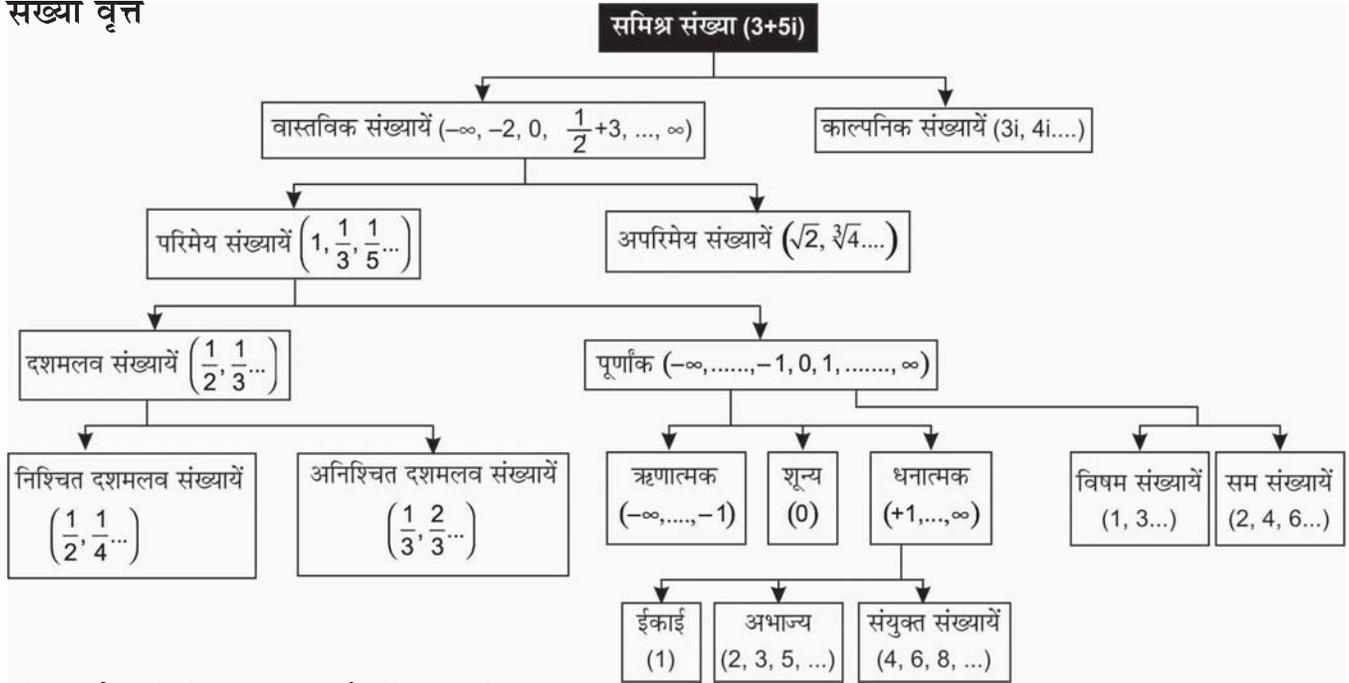
7. **संयुक्त संख्या** : वह प्राकृतिक संख्या जो अभाज्य नहीं है उसे संयुक्त संख्या कहते हैं जैसे- 4, 9, 15, 18, 27 आदि।

8. **परिमेय संख्या** : परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता है। जहां p और q दोनों पूर्णांक हैं, और $q \neq 0$ जैसे- $7, \frac{-9}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{1}{4}, 0$ आदि।

9. **अपरिमेय संख्या** : अपरिमेय संख्या वह संख्या है जिसको $\frac{p}{q}$ रूप में नहीं लिखा जा सकता है, p एवं q दोनों पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ जैसे- $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$ आदि।

10. **वास्तविक संख्या** : वह सभी संख्याएँ जो परिमेय अथवा अपरिमेय हैं जैसे- $\frac{12}{17}, \frac{19}{21}, \sqrt{5}, 5 + \sqrt{3}$ आदि।

संख्या वृत्त



संख्याओं की विभाजकता के लिए परीक्षण

- (i) 2 से विभाजित : कोई भी संख्या 2 द्वारा विभाजित है यदि उसका इकाई अंक 0, 2, 4, 6 अथवा 8 है जैसे- 130, 244, 566, 278 आदि।
- (ii) 3 से विभाजित : कोई भी संख्या 3 द्वारा विभाजित है यदि इसके अंकों का योग 3 का गुणज है।
जैसे- (a) 123 : 1 + 2 + 3 = 6 जो 3 का गुणज है इसलिए संख्या उससे विभाजित है।
(b) 89612 : 8 + 9 + 6 + 1 + 2 = 26 = 2 + 6 = 8 जो 3 का गुणज नहीं है इसलिए संख्या 3 से विभाजित नहीं है।
- (iii) 4 से विभाजित : जब उसके दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो। जैसे-1132, 1312, 1400, 1348 आदि।
- (iv) 5 से विभाजित : यदि इकाई अंक 0 अथवा 5 है तो वह 5 से विभाजित होगी। जैसे- 100, 205, 315 आदि।
- (v) 6 से विभाजित : यदि संख्या 2 और 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से विभाजित होगी। जैसे- 54, 96 आदि।
- (vi) 7 से विभाजित : कोई भी संख्या 7 से तभी विभाजित होगी जब संख्या के अन्तिम अंकों को दोगुना करके शेष अंकों से बनी संख्या में से घटाया जाए और इससे प्राप्त शेषफल यदि 7 से भाज्य अथवा 0 हो।

जैसे - 2429

इस संख्या का अन्तिम अंक 9 है और इसका दोगुना = 9 × 2 = 18

शेष अंकों की संख्या = 242

शेषफल = 242 - 18 = 224

उपरोक्त प्रक्रिया पुनः दोहराने पर,

शेषफल = 22 - 8 = 14 (7 से विभाजित है)

अतः संख्या 2429 भी 7 से विभाजित होगी।

प्रयत्न करें :

2961,7 से विभाजित है ?

(vi) 8 से विभाजकता : यदि उसके सैंकड़े, दहाई व इकाई के अंकों से बनी संख्या 8 से विभाजित हो। जैसे- 1864, 1024, 2008 और 5000 आदि।

(vii) 9 से विभाजकता : यदि संख्या के अंकों का योग 9 का गुणज है जैसे- 23409, 454554, 66636 आदि।

उदाहरण 1. “*” की कम से कम मान ज्ञात करें जिसके लिए $7 * 5462, 9$ से विभाजित है।

हल: मान p वांछित है, तो

$$(7 + p + 5 + 4 + 6 + 2) = (24 + p), 9 \text{ से भाज्य है।}$$

$$\therefore p = 3$$

उदाहरण 2. यदि संख्या $653xy, 90$ से भाज्य है। तो $(x + y)$ का मान ज्ञात करें।

हल : $90 = 10 \times 9$

स्पष्ट है $653xy, 10$ से भाज्य है, इसलिए $y = 0$

अब, $653x0, 9$ से भाज्य है।

इसलिए $(6 + 5 + 3 + x + 0) = (14 + x), 9$ से भाज्य है?

इसलिए $x = 4$

$$\therefore x + y = 4 + 0 = 4$$

(viii) 10 से विभाजित : यदि संख्या का इकाई अंक शून्य है जैसे- 50, 80, 100, 1310 आदि।

(ix) 11 से विभाजित : यदि सम स्थानों पर अंकों का योग और विषम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य अथवा 11 का गुणज है जैसे- 909183, 540045, 184712 आदि।

विषम और सम संख्याओं के सम्बन्ध में तथ्य

विषम \pm विषम = सम विषम \times विषम = विषम

विषम \pm सम = विषम विषम \times सम = सम

सम \pm सम = सम सम \times सम = सम

सम्पूर्ण संख्याओं के विभाजन का सूत्र

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

उदाहरण 3. एक संख्या को जब 899 से विभाजित किया जाता है तो शेष 63 बचता है। यदि वही संख्या 29 से विभाजित की जाए तो शेष क्या बचेगा ?

हल : संख्या = भाजक \times भागफल + शेषफल
 $= 899 \times x + 63$
 $= 31 \times 29 \times x + 29 \times 2 + 5$
 $= 29(31x + 2) + 5$

\therefore जब संख्या को 29 से विभाजित किया जाता है तो शेष 5 है।

चतुर विधि

संख्या = भाजक \times भागफल + शेष
 $= 899 \times 1 + 63 = 962$
सदैव भागफल को 1 लें
संख्या को 29 से भाग करने पर 5 शेष बचता है।

उदाहरण 4. भाग के प्रश्न में भाजक भागफल का 10 गुणा और शेष का 5 गुणा है। यदि शेष 46 है तो भाज्य ज्ञात करें।

हल : मान लीजिए भागफल Q और शेष R है

$$\therefore \text{भाजक} = 5 \times 46 = 230$$

$$\text{भागफल} = \frac{230}{10} = 23$$

$$\therefore \text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

$$= 230 \times 23 + 46$$

$$= 5290 + 46$$

$$= 5336$$

उदाहरण 5. सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो 25, 73 और 97 को विभाजित करे और प्रत्येक अवस्था में बराबर शेष हो ?

हल : संख्या = भाज्य × भागफल + शेषफल

$$25 = 24 \times 1 + 1 \quad \dots(i)$$

$$73 = 24 \times 3 + 1 \quad \dots(ii)$$

$$97 = 24 \times 4 + 1 \quad \dots(iii)$$

∴ 24 सबसे बड़ी संख्या है जो दी गई तीन संख्याओं को विभाजित करता है और प्रत्येक अवस्था में 1 शेष बचता है।

उदाहरण 6. एक संख्या को 68 से विभाजित करने पर उसे 269 भागफल और शेष 0 बचता है और उसी संख्या को 67 से विभाजित करने पर क्या शेष बचेगा ?

हल : संख्या = $269 \times 68 + 0 = 18292$

$$\begin{array}{r} 67 \overline{)18292} \quad (273 \\ \underline{134} \\ 489 \\ \underline{469} \\ 202 \\ \underline{201} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 269 \\ \times 68 \\ \hline 2152 \\ 1614 \times \\ \hline 18292 \end{array}$$

चतुर विधि

प्रश्न के अनुसार संख्या 68 का गुणज है इसलिए 68 को 67 से भाग देने पर हमें सदैव 1 शेष बचता है।

∴ वांछित शेष = 1

उदाहरण 7. वह कौन-सी छोटी से छोटी 5 अंकों वाली संख्या है जो 41 से पूरी तरह विभाजित है ?

हल : 5 अंकों की छोटी से छोटी संख्या = 10000

∴ अभीष्ट संख्या = $10000 + (41 - 37) = 10004$

$$\begin{array}{r} 41 \overline{)10000} \quad (243 \\ \underline{82} \\ 180 \\ \underline{164} \\ 160 \\ \underline{123} \\ 37 \end{array}$$

उदाहरण 8. 17 और 80 के मध्य कितनी प्राकृतिक संख्याएं हैं, जो 6 से विभाजित हों ?

हल : यह संख्या 18, 24, 30, 36,....., 78 है जो एक A.P. है।

यहाँ $a = 18, d = 24 - 18 = 6$ और $l = 78$

$$l = a + (n - 1)d$$

$$78 = 18 + (n - 1)6$$

$$\Rightarrow (n - 1) \times 6 = 60 \Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

∴ अभीष्ट संख्या = 11

चतुर विधि

श्रृंखला 18, 24, 30, 36-----78 है। आपकी श्रृंखला को इस तरह भी लिखा जा सकता है। 6 (3, 4, 5, 6----13) कुल अंक = $13 - 3 + 1 = 11$ सदैव 1 जोड़ना याद रखें।

एक भाज्य संख्या (Composite no.) के गुणनखण्डों की संख्या

साधारणतः किसी भी भाज्य संख्या C के लिए जिसको $C = a^m \times b^n \times c^p$ ----- से दर्शाया जाए, तो यहां a, b, c----- सभी अभाज्य कारक m, n, p ----- धनात्मक पूर्णांक हैं, गुणनखण्डों की संख्या $(m + 1)(n + 1)(p + 1)$ ----- के बराबर है।

अभाज्य कारकों की संख्या = $m + n + p$ -----

उदाहरण 9. $\{(4)^{11} \times 7^5 \times (11)^2\}$ के अभाज्य गुणनखण्ड की कुल संख्या ज्ञात करें ?

हल: $\{(4)^{11} \times 7^5 \times (11)^2\} = (2 \times 2)^{11} \times 7^5 \times (11)^2$
 $= (2^2)^{11} \times 7^5 \times (11)^2 = 2^{22} \times 7^5 \times 11^2$

∴ अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या = $(22 + 5 + 2) = 29$

इकाई की धारणा

(i) विषम संख्या के नियम

जब इकाई स्थान पर विषम अंक हो (5 के अतिरिक्त) संख्या को तब तक स्वयं से गुणा करें जब तक की इकाई स्थान पर $(---1)^n = (---1)$, $(---3)^{4n} = (---1)$ $(---7)^{4n} = (---1)$ एक नहीं प्राप्त कर लेते।

(ii) सम संख्या के लिए नियम

जब इकाई स्थान पर सम अंक हो, तो संख्या को स्वयं से तब तक गुणा करें जब तक की इकाई स्थान पर 6 नहीं प्राप्त करते। $(---2)^{4n} = (---6)$, $(---4)^{2n} = (---6)$ $(---6)^n = (---6)$, $(---8)^{4n} = (---6)$

नोट : यदि 1, 5 अथवा 6 इकाई स्थान पर हैं, तब दी गई कितनी संख्याओं में गुणा करने पर, इकाई स्थान पर वही अंक होगा जैसे-

$$(---1)^n = (---1), (---5)^n = (---5) (---6)^n = (---6)$$

उदाहरण 10. जब 2^{31} को 5 से भाग दिया गया तो शेष ज्ञात करें?

$$\text{हल : } 2^{31} = (2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}) \times 2 = (2^{10})^3 \times 2 = (1024)^3 \times 2$$

$$\{(1024)^3 \times 2\} \text{ में इकाई अंक} = 4 \times 2 = 8$$

अब 8 को 5 से भाग किया जाए तो 3 शेष बचता है।

$$\therefore 2^{31} \text{ को जब 5 से भाग किया जाए तो शेष} = 3$$

उदाहरण 11. $\{(264)^{102} + (264)^{103}\}$ में इकाई अंक क्या है ?

$$\text{हल : } (264)^{102} + (264)^{103} = (264)^{102} [1 + 264] \\ = (264)^{102} + 265$$

$$\therefore [(4)^{102} \times 5] \text{ में इकाई अंक} \\ = [(4^4)^{25} \times 4^2 \times 5] \\ = (6 \times 6 \times 5) = 0$$

उदाहरण 12. $5793405 \times 9999 = ?$

$$\text{हल : } 5793405 \times 9999 = 5793405 \times (10000 - 1) \\ = 57934050000 - 5793405 \\ = 57928256595$$

चतुर विधि

2^{31} को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है 2^{28+1+2} या $2^{28+1} \cdot 2^2$, 2^{28+1} का इकाई अंक 2 है। $2 \cdot 2^2$ का इकाई अंक 8 बनता है तो 8 को 5 से भाग करने पर 3 शेष बचता है।

चतुर विधि

$(264)^{102} + (264)^{103}$
हमें $(---4)^{102} + (---4)^{103} = (---6) + (---4)$
में इकाई अंक ज्ञात करना है और आपका उत्तर $6 + 4 = 10$ है और इकाई अंक 0 है।

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

- सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या अथवा धनात्मक पूर्णांक +1 है।
- सबसे बड़ा ऋणात्मक पूर्णांक -1 है।
- संख्या '0' ना तो धनात्मक है, ना ही ऋणात्मक संख्या है।
- 1 केवल एक ऐसी संख्या है जो ना तो अभाज्य संख्या है ना ही भाज्य संख्या है।
- 2 केवल एक ऐसी संख्या है जो सम संख्या ही है और अभाज्य संख्या भी है।
- 2 सबसे छोटी अभाज्य संख्या है और अकेली सम संख्या है, जो अभाज्य है।
- 1 और 100 के बीच अभाज्य संख्याएं 25 हैं।
- 1 और 1000 के बीच अभाज्य संख्याएं 168 हैं।
- एक वर्ग संख्या अपनी इकाई के स्थान पर 0, 1, 4, 5, 6 अथवा 9 रखती है।
- एक धनात्मक संख्या में 0 से 9 तक कोई भी अंक इकाई अंक हो सकता है।

अभ्यास परीक्षण - 1

निर्देश (1 से 35) : नीचे दिए गए प्रश्नों में प्रत्येक के लिए सही उत्तर का चयन करें:

1. संख्या 856973 में 6 के स्थानीय मान और जातीय मान का अन्तर ज्ञात कीजिए ?
(a) 973 (b) 6973 (c) 5994 (d) 897
(e) कोई भी नहीं।
2. संख्या 69758472 में जो 7 है, उनके स्थानीय मान का अन्तर ज्ञात कीजिए ?
(a) 0 (b) 6993 (c) 699930 (d) 01
(e) कोई भी नहीं।
3. गुणनफल $(784 \times 618 \times 917 \times 463)$ में इकाई अंक है।
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 10
(e) 5
4. यदि संख्या $517 * 324$, 3 से पूर्णतया भाज्य है, तो सबसे छोटी सम्पूर्ण संख्या का स्थान * कि जगह क्या होगा ?
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4
5. निम्नलिखित कौन-सी संख्या 99 से पूर्णतया भाज्य है ?
(a) 3572404 (b) 135792 (c) 913464 (d) 114345
(e) कोई भी नहीं।
6. $4864 \times 4p2$ का गुणनफल 12 से भाज्य है, p का मान क्या होगा ?
(a) 2 (b) 5 (c) 6 (d) 7
(e) कोई भी नहीं।
7. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या 11 से पूरी तरह विभाजन योग्य है ?
(a) 235641 (b) 245642 (c) 315624 (d) 415624
(e) कोई भी नहीं।
8. पहली पाँच अभाज्य संख्याओं का योग क्या होगा ?
(a) 11 (b) 18 (c) 26 (d) 28 (e) 326419
9. 1056 में कौन-सी छोटी संख्या जोड़ी जाए ताकि संख्या पूर्णतः 23 से विभाज्य हो ?
(a) 2 (b) 3 (c) 18 (d) 21
(e) इनमें से कोई भी नहीं।
10. इनमें से कौन सी संख्या 3, 7, 9 और 11 से विभाज्य है ?
(a) 639 (b) 2079 (c) 3791 (d) 37911
(e) इनमें से कोई भी नहीं।
11. किसी संख्या को 56 से विभाजित करने पर 29 शेष बचता है, उसी संख्या को 8 से विभाजित करने पर क्या शेष बचेगा ?
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7
(e) कोई भी नहीं।
12. एक संख्या को क्रमानुसार 4, 5 और 6 से विभाजित किया जाता है तथा 2, 3 और 4 क्रमवार शेष बचते हैं, तो वह संख्या क्या है ?
(a) 214 (b) 476 (c) 954 (d) 1908
(e) कोई भी नहीं।