

IBTTM
IBT INSTITUTE PVT. LTD.



गणित एवं सामान्य बुद्धि

Helpline : 96 96 96 00 29 | 0181-4606260
www.ibtindia.com

COURSE BOOK

विषय-सूची

संख्या पद्धति

1. संख्या पद्धति 1-16

ज्यामिति

2. रेखाएँ और कोण 17-23
3. त्रिभुज 24-27
4. त्रिभुज के केन्द्र 28-36
5. त्रिभुज (सर्वांगसमता तथा समरूपता) 37-43
6. चतुर्भुज 44-54
7. वृत्त 55-66

क्षेत्रमिति

8. क्षेत्रमिति -2ख्रव 67-77
9. क्षेत्रमिति -3ख्रव 78-83
10. प्रिज्म तथा पिरामिड 84-90

बीजगणित

11. घातांक एवं करणी 91-99
12. बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ 100-114

त्रिकोणमितीय

13. त्रिकोणमितीय - कोणों का वृत्तीय माप 115-117
14. त्रिकोणमितीय अनुपात 118-125
15. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ 126-131
16. त्रिकोणमितीय फलनों का अधिकतम तथा न्यूनतम मान 132-135
17. ऊँचाई एवं दूरी 136-144

परिवर्तन और संयोजन, प्रायिकता

18. परिवर्तन और संयोजन 145-155
19. प्रायिकता 156-169



संख्या पद्धति

संख्याएँ : संख्या जो अंकों के समूह द्वारा दर्शायी जाती है, उसे संख्या कहते हैं। संख्या 843215696 को इस प्रकार भी दर्शाया जा सकता है।

दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
8	4	3	2	1	5	6	9	6

संख्याओं के प्रकार

1. **प्राकृतिक संख्याएँ** : गिनती वाली संख्याओं को प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं।

इनके समुच्चय को 'N' से प्रदर्शित करते हैं।

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

2. **पूर्ण संख्याएँ** : सभी गिनती वाली संख्याएँ और 0 सम्पूर्ण अंकों का समूह बनाते हैं।

इनके समुच्चय को 'W' से प्रदर्शित करते हैं।

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

3. **पूर्णांक** : सभी गिनती वाली संख्याएँ शून्य और गिनती वाली ऋणात्मक संख्याएँ पूर्णांकों का समूह बनाती हैं।

इनके समुच्चय को 'I' से प्रदर्शित करते हैं।

$$I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

4. **सम संख्या** : जो संख्या 2 से विभाजित होती है उसे सम संख्या कहते हैं जैसे- 2, 4, 12, 28 आदि।

5. **विषम संख्या** : जो संख्या 2 से विभाजित नहीं होती उनको विषम संख्या कहते हैं जैसे- 1, 3, 5, 7 आदि।

6. **अभाज्य संख्या** : उस संख्या को अभाज्य संख्या कहते हैं यदि इसके सिर्फ दो गुणखंड हैं 1 और वह संख्या स्वयं जैसे 2, 5, 11, 19, 23 आदि।

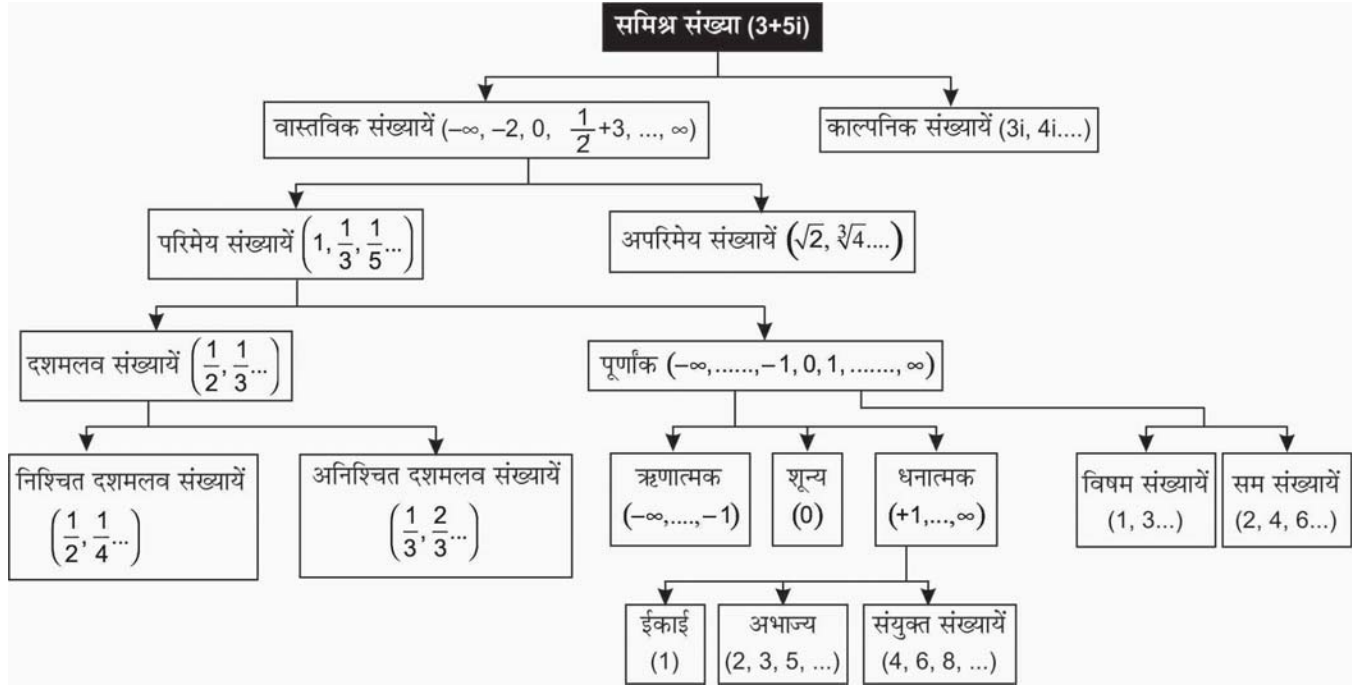
7. **संयुक्त संख्या** : वह प्राकृतिक संख्या जो अभाज्य नहीं है उसे संयुक्त संख्या कहते हैं जैसे- 4, 9, 15, 18, 27 आदि।

8. **परिमेय संख्या** : परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ रूप में लिखा जा सकता है। जहां p और q दोनों पूर्णांक है, और $q \neq 0$ जैसे- $7, \frac{-9}{5}, \frac{-2}{7}, \frac{1}{4}, 0$ आदि।

9. **अपरिमेय संख्या** : अपरिमेय संख्या वह संख्या है जिसको $\frac{p}{q}$ रूप में नहीं लिखा जा सकता है, p एवं q दोनों पूर्णांक है और $q \neq 0$ जैसे- $\sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}$ आदि।

10. **वास्तविक संख्या** : वह सभी संख्याएँ जो परिमेय अथवा अपरिमेय है जैसे- $\frac{12}{17}, \frac{19}{21}, \sqrt{5}, 5 + \sqrt{3}$ आदि।

संख्या वृत्त



संख्याओं की विभाजकता के लिए परीक्षण

- (i) 2 से विभाजित : कोई भी संख्या 2 द्वारा विभाजित है यदि उसका इकाई अंक 0, 2, 4, 6 अथवा 8 है जैसे- 130, 244, 566, 278 आदि।
- (ii) 3 से विभाजित : कोई भी संख्या 3 द्वारा विभाजित है यदि इसके अंकों का योग 3 का गुणज है।
जैसे- (a) 123 : 1 + 2 + 3 = 6 जो 3 का गुणज है इसलिए संख्या उससे विभाजित है।
(b) 89612 : 8 + 9 + 6 + 1 + 2 = 26 = 2 + 6 = 8 जो 3 का गुणज नहीं है इसलिए संख्या 3 से विभाजित नहीं है।
- (iii) 4 से विभाजित : जब उसके दहाई और इकाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित हो। जैसे-1132, 1312, 1400, 1348 आदि।
- (iv) 5 से विभाजित : यदि इकाई अंक 0 अथवा 5 है तो वह 5 से विभाजित होगी। जैसे- 100, 205, 315 आदि।
- (v) 6 से विभाजित : यदि संख्या 2 और 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से विभाजित होगी। जैसे- 54, 96 आदि।
- (vi) 7 से विभाजित : कोई भी संख्या 7 से तभी विभाजित होगी जब संख्या के अन्तिम अंकों को दोगुना करके शेष अंकों से बनी संख्या में से घटाया जाए और इससे प्राप्त शेषफल यदि 7 से भाज्य अथवा 0 हो।

जैसे - 2429

इस संख्या का अन्तिम अंक 9 है और इसका दोगुना = $9 \times 2 = 18$

शेष अंकों की संख्या = 242

शेषफल = $242 - 18 = 224$

उपरोक्त प्रक्रिया पुनः दोहराने पर,

शेषफल = $22 - 8 = 14$ (7 से विभाजित है)

अतः संख्या 2429 भी 7 से विभाजित होगी।

प्रयत्न करें :

2961,7 से विभाजित है ?

(vi) 8 से विभाजकता : यदि उसके सैंकड़े, दहाई व इकाई के अंकों से बनी संख्या 8 से विभाजित हो। जैसे- 1864, 1024, 2008 और 5000 आदि।

(vii) 9 से विभाजकता : यदि संख्या के अंकों का योग 9 का गुणज है जैसे- 23409, 454554, 66636 आदि।

उदाहरण 1. ‘*’ की कम से कम मान ज्ञात करें जिसके लिए $7 * 5462, 9$ से विभाजित है।

हल: मान p वांछित है, तो

$$(7 + p + 5 + 4 + 6 + 2) = (24 + p), 9 \text{ से भाज्य है।}$$

$$\therefore p = 3$$

उदाहरण 2. यदि संख्या $653xy$, 90 से भाज्य है। तो $(x + y)$ का मान ज्ञात करें।

$$\text{हल : } 90 = 10 \times 9$$

स्पष्ट है $653xy$, 10 से भाज्य है, इसलिए $y = 0$

अब, $653x0$, 9 से भाज्य है।

$$\text{इसलिए } (6 + 5 + 3 + x + 0) = (14 + x), 9 \text{ से भाज्य है?}$$

$$\text{इसलिए } x = 4$$

$$\therefore x + y = 4 + 0 = 4$$

(viii) **10 से विभाजित** : यदि संख्या का इकाई अंक शून्य है जैसे- $50, 80, 100, 1310$ आदि।

(ix) **11 से विभाजित** : यदि सम स्थानों पर अंकों का योग और विषम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य अथवा 11 का गुणज है जैसे- $909183, 540045, 184712$ आदि।

विषम और सम संख्याओं के सम्बन्ध में तथ्य

$$\text{विषम} \pm \text{विषम} = \text{सम} \qquad \text{विषम} \times \text{विषम} = \text{विषम}$$

$$\text{विषम} \pm \text{सम} = \text{विषम} \qquad \text{विषम} \times \text{सम} = \text{सम}$$

$$\text{सम} \pm \text{सम} = \text{सम} \qquad \text{सम} \times \text{सम} = \text{सम}$$

सम्पूर्ण संख्याओं के विभाजन का सूत्र

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

उदाहरण 3. एक संख्या को जब 899 से विभाजित किया जाता है तो शेष 63 बचता है। यदि वही संख्या 29 से विभाजित की जाए तो शेष क्या बचेगा ?

$$\begin{aligned} \text{हल :} \qquad \text{संख्या} &= \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\ &= 899 \times x + 63 \\ &= 31 \times 29 \times x + 29 \times 2 + 5 \\ &= 29(31x + 2) + 5 \end{aligned}$$

\therefore जब संख्या को 29 से विभाजित किया जाता है तो शेष 5 है।

चतुर विधि

$$\begin{aligned} \text{संख्या} &= \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष} \\ &= 899 \times 1 + 63 = 962 \end{aligned}$$

सदैव भागफल को 1 लें

संख्या को 29 से भाग करने पर 5 शेष बचता है।

उदाहरण 4. भाग के प्रश्न में भाजक भागफल का 10 गुणा और शेष का 5 गुणा है। यदि शेष 46 है तो भाज्य ज्ञात करें।

हल : मान लीजिए भागफल Q और शेष R है

$$\therefore \qquad \text{भाजक} = 5 \times 46 = 230$$

$$\text{भागफल} = \frac{230}{10} = 23$$

$$\begin{aligned} \therefore \qquad \text{भाज्य} &= \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\ &= 230 \times 23 + 46 \\ &= 5290 + 46 \\ &= 5336 \end{aligned}$$

उदाहरण 5. सबसे बड़ी संख्या ज्ञात करें जो 25, 73 और 97 को विभाजित करे और प्रत्येक अवस्था में बराबर शेष हो ?

हल : संख्या = भाज्य × भागफल + शेषफल

$$25 = 24 \times 1 + 1 \quad \dots(i)$$

$$73 = 24 \times 3 + 1 \quad \dots(ii)$$

$$97 = 24 \times 4 + 1 \quad \dots(iii)$$

∴ 24 सबसे बड़ी संख्या है जो दी गई तीन संख्याओं को विभाजित करता है और प्रत्येक अवस्था में 1 शेष बचता है।

उदाहरण 6. एक संख्या को 68 से विभाजित करने पर उसे 269 भागफल और शेष 0 बचता है और उसी संख्या को 67 से विभाजित करने पर क्या शेष बचेगा ?

हल : संख्या = $269 \times 68 + 0 = 18292$

$$\begin{array}{r} 67 \overline{)18292} \quad (273 \\ \underline{134} \\ 489 \\ \underline{469} \\ 202 \\ \underline{201} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 269 \\ \underline{\times 68} \\ 2152 \\ 1614 \times \\ \hline 18292 \end{array}$$

चतुर विधि

प्रश्न के अनुसार संख्या 68 का गुणज है इसलिए 68 को 67 से भाग देने पर हमें सदैव 1 शेष बचता है।

∴ वांछित शेष = 1

उदाहरण 7. 1672 में से वह कौन-सी छोटी से छोटी संख्या घटाई जाए कि प्राप्त संख्या 17 से पूरी तरह विभाजित हो ?

हल : $17 \overline{)1672} \quad (98$

$$\begin{array}{r} 153 \\ \underline{142} \\ 136 \\ \underline{6} \end{array} \quad \text{घटाये जाने वाली संख्या है} = 6$$

उदाहरण 8. 13601 में से वह कौन-सी छोटी से छोटी संख्या घटाई जाए ताकि प्राप्त संख्या 87 से विभाजित हो ?

हल : $87 \overline{)13601} \quad (156$

$$\begin{array}{r} 87 \\ \underline{490} \\ 435 \\ \underline{551} \\ 522 \\ \underline{29} \end{array} \quad \therefore \text{अभीष्ट संख्या} = 29$$

उदाहरण 9. वह कौन-सी छोटी से छोटी 5 अंकों वाली संख्या है जो 41 से पूरी तरह विभाजित है ?

हल : 5 अंकों की छोटी से छोटी संख्या = 10000

∴ अभीष्ट संख्या = $10000 + (41 - 37) = 10004$

सभी पहली N प्राकृतिक संख्याओं का योग

$S = 1 + 2 + 3 + \dots + N$

$S = N \frac{(N+1)}{2}$

$$\begin{array}{r} 41 \overline{)10000} \quad (243 \\ \underline{82} \\ 180 \\ \underline{164} \\ 160 \\ \underline{123} \\ 37 \end{array}$$

पहली N विषम संख्याओं का योग

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + N$$

$$S = N^2 \text{ (N = पदों की संख्या)}$$

पहली N सम संख्याओं का योग

$$S = 2 + 4 + 6 + \dots + N$$

$$S = N(N + 1)$$

पहली N प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2$$

$$S = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

पहली N प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग

$$S = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$$

समांतर श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणी की धारणाएं

(समांतर श्रेणी)

समांतर श्रेणी वह है जिनमें क्रमांक संख्याएं एक निश्चित संख्या को पहली संख्या में जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होती हैं।

जैसे उदाहरण के लिए- 3, 5, 7, 9, 11-----

$$d \text{ (सर्वान्तर)} = 5 - 3 = 2$$

$$= 7 - 5 = 2$$

$a \rightarrow$ पहला पद $n \rightarrow$ संख्या का पद

$$l \rightarrow \text{अन्तिम पद} = a + (n - 1)d$$

$$n \text{ पदों का योग} = \frac{n}{2} [a + l]$$

गुणोत्तर श्रेणी :

गुणोत्तर श्रेणी जिनमें प्रत्येक अगली संख्या पहली दी गई संख्या को निश्चित संख्या से गुणा करके अथवा भाग देकर प्राप्त किया जाता है जैसे-उदाहरण के तौर पर 4, 8, 16, 32, 64 -----

$$r \text{ (सर्वानुपात)} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = 2$$

$a \rightarrow$ पहला पद

$$n \text{ पदों का योग} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

उदाहरण 10. 17 और 80 के मध्य कितनी प्राकृतिक संख्याएं हैं, जो 6 से विभाजित हों ?

हल : यह संख्या 18, 24, 30, 36,....., 78 है जो एक A.P. है।

यहाँ $a = 18, d = 24 - 18 = 6$ और $l = 78$

$$l = a + (n - 1) d$$

$$78 = 18 + (n - 1) 6$$

$$\Rightarrow (n - 1) \times 6 = 60 \Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

∴ अभीष्ट संख्या = 11

चतुर विधि

श्रृंखला 18, 24, 30, 36-----78 है। आपकी श्रृंखला को इस तरह भी लिखा जा सकता है। 6 (3, 4, 5, 6----13)
कुल अंक = 13 - 3 + 1 = 11 सदैव 1 जोड़ना याद रखें।

उदाहरण 11. 75 से कम सभी सम संख्याओं का योग ज्ञात करें?

हल : योग = 2 + 4 + 6 + + 74 जो एक A.P. है

यहाँ पर, $a = 2, d = 4 - 2 = 2, l = 74, n = 37$

$$\therefore \text{योग} = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{37}{2} \times (2+74) = 37 \times 38 = 1406$$

चतुर विधि

श्रृंखला में 2 + 4 + 6 + ----- + 74
 $S = 2 (1 + 2 + 3 + ----- + 37)$
 $S = 2 \frac{(37 \times 38)}{2} = 1406$

उदाहरण 12. 1 से 500 तक की संख्याओं का योग क्या है ?

हल : 1 और 500 के मध्य संख्याओं का योग = $\frac{500(500+1)}{2}$

[∵ 1 से n तक संख्याओं का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$]

$$= \frac{500 \times 501}{2}$$

$$= \frac{250500}{2} = 125250$$

उदाहरण 13. $(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10})$ का योग ज्ञात करें ?

हल : यह एक G.P. है।

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2 \times 1023 = 2046$$

एक भाज्य संख्या (Composite no.) के गुणनखण्डों की संख्या

साधारणतः किसी भी भाज्य संख्या C के लिए जिसको $C = a^m \times b^n \times c^p$ ----- से दर्शाया जाए, तो यहां a, b, c---
 -----सभी अभाज्य कारक m, n, p ----- धनात्मक पूर्णांक हैं, गुणनखण्डों की संख्या $(m + 1) (n + 1) (p + 1)$ -----
 ----- के बराबर है।

अभाज्य कारकों की संख्या = $m + n + p$ -----

उदाहरण 14. $\{(4)^{11} \times 7^5 \times (11)^2\}$ के अभाज्य गुणनखण्ड की कुल संख्या ज्ञात करें ?

हल: $\{(4)^{11} \times 7^5 \times (11)^2\} = (2 \times 2)^{11} \times 7^5 \times (11)^2$
 $= (2^2)^{11} \times 7^5 \times (11)^2$
 $= 2^{22} \times 7^5 \times 11^2$

∴ अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या

$$= (22 + 5 + 2) = 29$$